pHormulário

2018

Matemática I

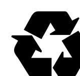


FORMULÁRIO

ÍNDICE:

1. CONJUNTO 2
2. FUNÇÃO AFIM 2
3. FUNÇÃO QUADRÁTICA 2
4. FUNÇÃO EXPONENCIAL 3
5. LOGARITMO 3
6. FUNÇÃO LOGARITMICA 3
7. PORCENTAGEM E JUROS 4
8. MATRIZES 4
9. DETERMINANTES 4
10. SISTEMAS LINEARES 5
11. NÚMERO COMPLEXOS 5
12. POLINÔMIOS 6
13. VETORES NO $\mathbb{R}^2$ E $\mathbb{R}^3$ 7
14. EQUAÇÃO DA RETA 9
15. EQUAÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA 10
16. EQUAÇÃO DA ELIPSE 10
17. ESTATÍSTICA 10

AUTOR: PAULO SILVA
"TODOS OS DIREITOS RESERVADOS POR CURSO PH LTDA."



O pH só utiliza papéis certificados FSC, produzidos a partir de fontes renováveis.

1. Conjuntos Numéricos

Conjuntos numéricos:

Conjunto dos Naturais (ℕ): {1, 2, 3, 4,....}

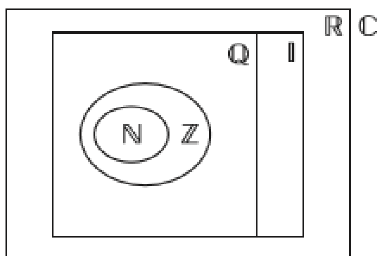
Conjunto dos Inteiros (ℤ): {..., – 2, – 1, 0, 1 , 2,...}

Conjunto dos Racionais (ℚ): $\{x \mid x = \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*\}$

Conjunto dos Irracionais (𝕀): números que não podem ser escritos em forma de fração.

Conjunto dos Reais (ℝ): Racionais + irracionais

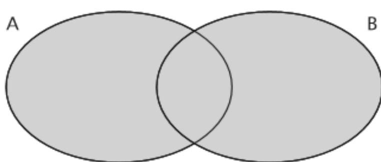
Conjunto dos Complexos (ℂ): {... 2i, 2+i, -1}



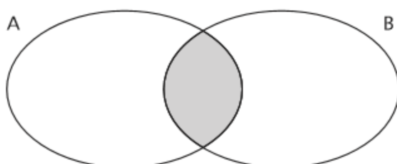
Operações:

Conjunto Vazio: { } ou ∅

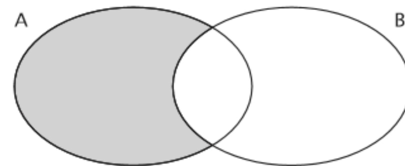
União de conjuntos: A ∪ B



Interseção: A ∩ B



Diferença: A – B

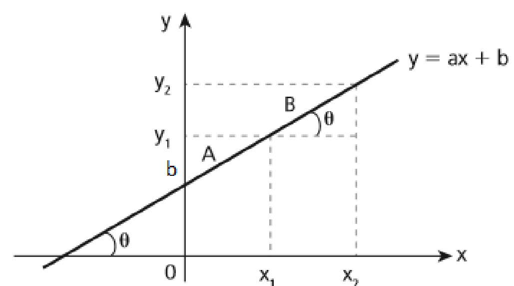


Número de elementos da união de dois conjuntos:

n(A ∪ B) = n(A) + n(B) – n(A ∩ B)

2. Função Afim

f(x) = ax + b



Coeficiente angular: a → Inclinação da reta
Coeficiente linear: b → Interseção com o eixo y

a = tgθ

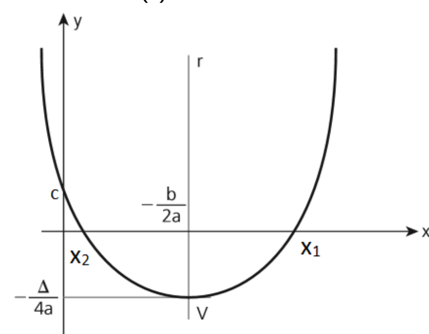
Se a > 0 → crescente

Se a < 0 → reta decrescente

Raíz da função: $x = -\frac{b}{a}$

3. Função Quadrática

f(x) = ax² + bx + c



Concavidade:

$a > 0 \rightarrow$ concavidade para cima $\cup$
$a < 0 \rightarrow$ concavidade para baixo $\cap$

Interseção com o eixo Y: O ponto (0, c)

Interseção com o eixo X: Raízes $(x_1, 0)$ e $(x_2, 0)$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \ \Delta = b^2 - 4ac$$

$$\begin{cases} \Delta > 0 \rightarrow \text{2 raízes reais e distintas} \\ \Delta = 0 \rightarrow \text{2 raízes reais e idênticas} \\ \Delta < 0 \rightarrow \text{não possui raízes reais} \end{cases}$$

Soma das raízes: $S = -\frac{b}{a}$

Produto das raízes: $P = \frac{c}{a}$

Forma fatorada: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

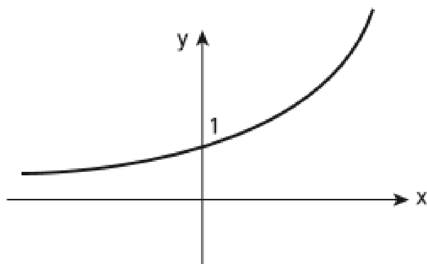
Vértice: $V = (x_V, y_V)$

$$\begin{cases} x_v = -\dfrac{b}{2a} \\ y_v = -\dfrac{\Delta}{4a} \end{cases}$$

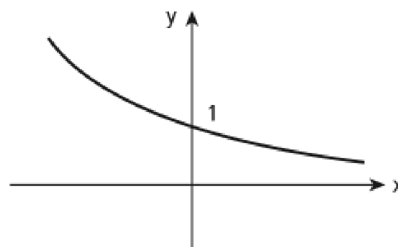
4. Função Exponencial

$f(x) = a^x$
$a > 0$ e $a \neq 1$

Se $a > 0 \rightarrow f(x)$ é crescente



Se $0 < a < 1 \rightarrow f(x)$ é decrescente



5. Logaritmo

$\log_b a = x \rightarrow b^x = a$
$a > 0$ e $b > 0$ e $b \neq 1$

Consequências:

a) $\log_b 1 = 0$

b) $\log_b b = 1$

c) $\log_b b^m = m$

d) $b^{\log_b a} = a$

e) $\log_b M = \log_b N \leftrightarrow M = N$

Propriedades:

a) $\log_c A.B = \log_c A + \log_c B$

b) $\text{lgo}_c \frac{A}{B} = \log_c A - \log_c B$

c) $\log_b a^m = m. \log_b a$

d) $\log_{b^m} a = \frac{1}{m}.\log_b a$

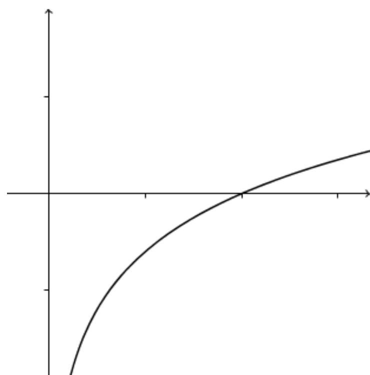
Mudança de Base

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

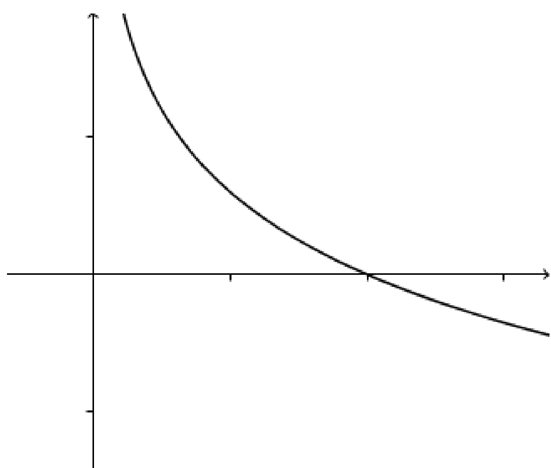
6. Função Logaritmica

$f(x) = \log_b x$
$x > 0$ e $b > 0$ e $b \neq 1$

Se b > 1 → função crescente



Se 0 < b < 1 → função decrescente



7. Porcentagem e Juros

Porcentagem p de um valor V: p% de $V = \frac{p}{100} \cdot V$

Aumento de a% sobre um valor V: $V\left(1 + \frac{a}{100}\right)$

Desconto de a% sobre um valor V: $V\left(1 - \frac{a}{100}\right)$

Juros Simples: J = C . i . t e M = C + J

Juros Compostos: $M = C(1 + i)^T$ e J = M – C

8. Matrizes

$$A_{mxn} = [a_{ij}]_{mxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

m = número de linhas
n = número de colunas

Matriz identidade (I): $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Matriz transposta (A^T): Trocar linhas por colunas

Adição e subtração: Somar ou subtrair termos correspondentes de matrizes de mesma ordem.

Produto de uma matriz por um número: Multiplicar todos os elementos da matriz por esse número.

Produto de matrizes: Só podemos efetuar o produto de matrizes quando o número de colunas da primeira matriz é igual ao número de linhas da segunda.

$$A_{mxn} \cdot B_{nxp}$$

Multiplicar linhas da primeira pelas colunas da segunda.

Exemplo: $A_{2x2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $B_{2x3} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

a_{11} = 1.2 + (– 1). (– 1) = 3
a_{12} = 1.0 + (– 1). 3 = – 3
a_{13} = 1.1 + (– 1). 2 = – 1
a_{21} = 0.2 + 2.(– 1) = – 2
a_{22} = 0.0 + 2.3 = 6
a_{23} = 0.1 + 2.2 = 4

$A \cdot B = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -1 \\ -2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$

Matriz inversa (A^{-1}): É a matriz que quando mutiplicada pela matriz A resulta na I.

9. Determinante

Somente para matrizes quadradas.

1ª ordem:

$A = [a_{11}] \rightarrow \det(A) = a_{11}$

2ª ordem:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \rightarrow \det(A) = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$$

3ª ordem:

Usar regra de Sarrus

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

$$\det(A) = \left[\begin{matrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{matrix}\right] \begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ -2 & 3 \end{matrix}$$

det(A) = 0 + (– 4) + 0 – 4 – 0 – 3 = – 11

Propriedades:

A) det(A) = det(A^T)
B) Duas linhas ou colunas iguais resultam em determinante igual a 0.
C) Se multiplicarmos uma linha ou coluna por m, o determinante e multiplicado por m.
D) Trocar a ordem de duas linhas ou colunas troca o sinal do determinante
E) Linha ou coluna toda de zeros resulta em determinante igual a 0.
F) Se uma linha ou coluna for igual a combinação linear de outras, o determine é igual a 0.
G) det(A.B) = detA.detB
H) $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$
I) Determinante de uma matriz triangular é o produto dos elementos da sua diagonal principal.

10. Sistemas Lineares

Escalonamento:

Multiplicar uma equação por uma constante e adicionar a outra afim de eliminar variáveis da segunda.

Teorema de Cramer:

$$S = \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

$$\text{Seja } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, D_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & b_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, D_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

$$x = \frac{D_x}{D}, y = \frac{D_y}{D} \text{ e } z = \frac{D_z}{D}$$

Discussão:

1) Sistemas Possíveis e Determinados (SPD): Possuem uma única solução. D ≠ 0
2) Sistemas Possíveis e Intererminados (SPI): Possuem Infinitas soluções. D = 0
3) Sistemas Impossíveis: Não possuem soluções. D = 0

11. Números Complexos

$$z = a + bi$$
$$a, b \in \mathbb{R} \text{ e } i = \sqrt{-1}$$

→ a é a parte real
→ bi é a parte imaginária

Conjugado: $\bar{z} = a - bi$

Operações:

Se $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$,

A) $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$

B) $z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$

C) $z_1.z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$

D) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a + bi}{c + di}, \dfrac{c - di}{c - di} = \dfrac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 - (di)^2}$

Potências de i:

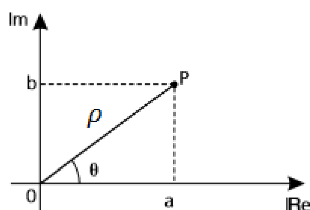
$i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$

$i^n = i^r$, onde r é o resto da divisão de n por 4

Forma trigonométrica:

$z = \rho(\cos\theta + i.\text{sen}\theta) = \rho \text{ cis}\theta$

p = módulo de z = $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
θ = argumento de z



Operações:

Se $z_1 = \rho_1 \text{ cis}\theta_1$ e $z_2 = \rho_2\text{cis}\theta_2$

A) $z_1.z_2 = \rho_1\rho_2\text{cis}(\theta_1 + \theta_2)$

B) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\text{cis}(\theta_1 - \theta_2)$

C) $z^n = p^n \text{ cis}(n\theta)$

D) $\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho}\text{cis}(-\theta)$

Raízes:

Equação $\rightarrow x^n = z$

As raízes são dadas pela expressão:

$$x = \sqrt[n]{\rho}\text{ cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), \text{ onde } k = 0, 1. 2, ..., (n-1)$$

12. Polinômios

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$

→ x: variável do polinômio → $n \in \mathbb{N}$
→ $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$: coeficientes dos polinômios

Raíz:

a é raíz de $P(x) \leftrightarrow P(a) = 0$

Soma dos coeficientes:

$a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0 = P(1)$

Divisão:

I. Ordenamos P(x) e D(x), segundo as potências decrescentes de x, e montamos o esquema P(x) | D(x)
II. Começamos dividindo o termo de maior grau de P(x) pelo termo de maior grau de D(x), determinando o termo de maior grau de Q(x).
III. Multiplicamos este primeiro termo de Q(x) pelo polinômio D(x) e subtraímos de P(x).
IV. Procedemos desta forma sucessivamente até obtermos um resto cujo grau seja menor que o de D(x) ou igual a zero.

Teorema do resto:

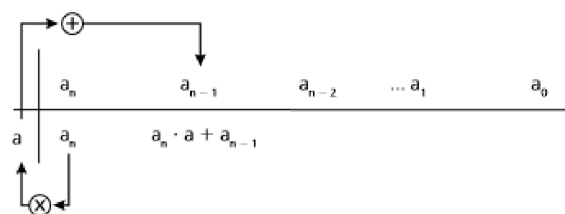
O resto r(x) da divisão de um polinômio p(x) por um binômio do primeiro grau d(x)= ax + b é igual a $p\left(-\frac{b}{a}\right)$, onde $-\frac{b}{a}$ é a raíz de d(x).

Teorema de D'alambert:

a é raíz de p(x) se, e somente se, p(x) é divisível por (x – a).

Briot Rouffini:

Apenas para divisão de um polinômio p(x) por um binômio do primeiro grau do tipo (x – a). Seguir o esquema abaixo:



e o resultado será:

	coeficientes de p(x)	
a	coeficientes de q(x)	resto r(x)

Decomposição:

$p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$

onde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são as raízes do polinômio.

Raízes imaginárias:

Se $z = a + bi$ é raíz de um polinômio de coeficiente reais, entaõ seu conjugado $\bar{z} = a - bi$ também é raíz do polinômio

Relações de Girard:

A) Para equações do 2º grau

$ax^2 + bx + c = 0$

$x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$

$x_1.x_2 = \dfrac{c}{a}$

B) Para equações do 3º grau

$ax^2 + bx^2 + cx + d = 0$

$x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a}$

$x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = \dfrac{c}{a}$

$x_1x_2x_3 = -\dfrac{d}{a}$

C) Caso geral

$ax^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{x-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$

$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a}$

$x_1x_2 + \ldots + x_{n-1}x_n = -\dfrac{a_{n-2}}{a}$

$x_1x_2x_3 \ldots x_n = (-1)^n\dfrac{a_0}{a}$

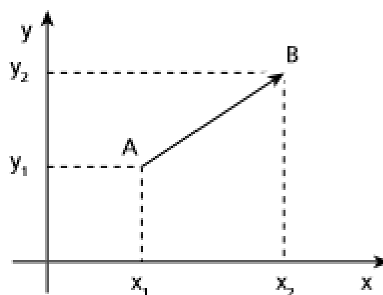
Atenção para a alternância de sinais.

A primeira relação temos as raízes somadas uma a uma. Na segunda relação elas são somadas depois de multiplicadas duas a duas. E assim por diante até a última que é o produto das raízes.

13. Vetores no $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

Segmento orientado com Direção, Sentido e Módulo.

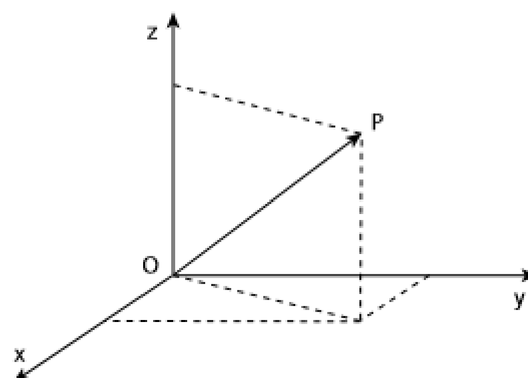
Vetores no $\mathbb{R}^2$:



$\vec{v} = \overline{AB} = B - A = (x_2, y_2) - (x_1, y_1)$

$\vec{v} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

Vetores no $\mathbb{R}^3$:

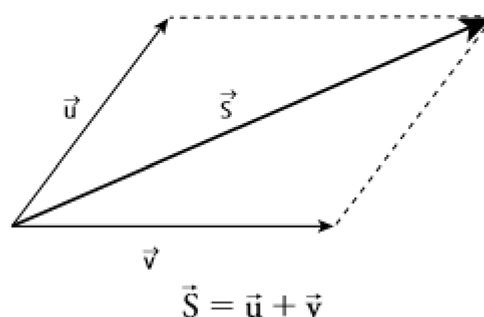


$\vec{v} = \overline{P0} = P - 0 = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1)$

$\vec{v} = (x_2, -x_1, y_2 - y_1, z_2, -z_1)$

Adição de vetores:

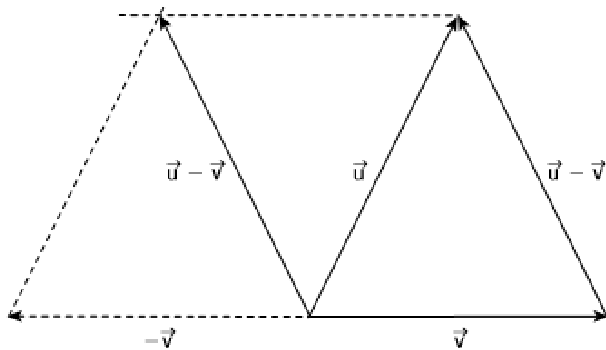
$\vec{s} = \vec{u} + \vec{v} = (x_u + x_v, y_u + y_v)$



$\vec{S} = \vec{u} + \vec{v}$

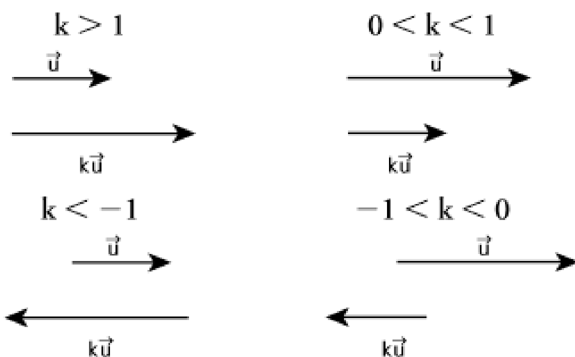
Subtração de vetores:

$\vec{D} = \vec{u} - \vec{v} = (x_u - x_v, y_u + y_v)$

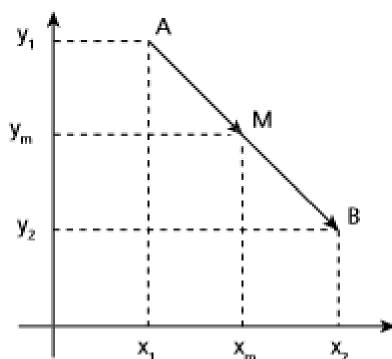


Multiplicação por um número real:

$k.\vec{u} = (k.x_u,\ k.y_u)$

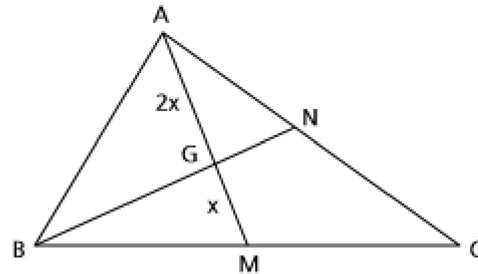


Ponto Médio:



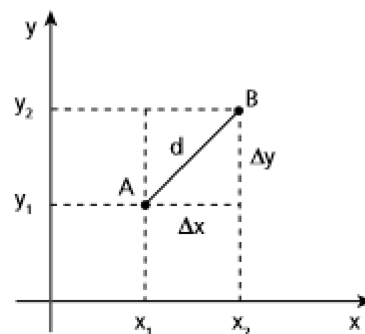
$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

Baricentro:



$$G = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{2}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{2} \right)$$

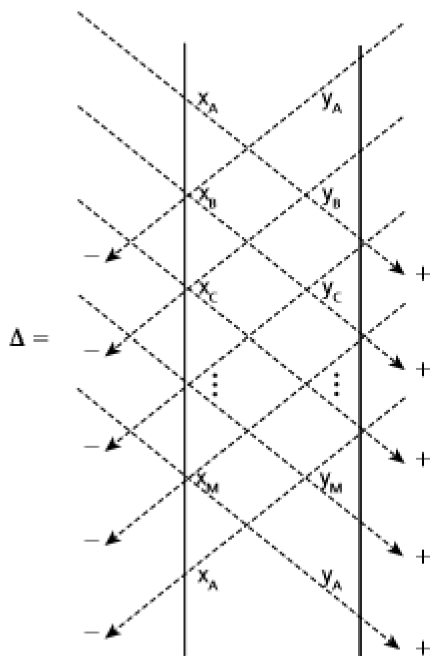
Distância entre dois pontos:



$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Área de um polígono:

Se o polígono tem vértices A, B, C,..M , sua área pode ser dada por $S = \frac{1}{2}|\Delta|$ onde Δ é dado pelo seguinte procedimento:



Produto escalar:

É um número dado por $\vec{u}\,.\,\vec{v} = x_u x_v + y_u y_v$

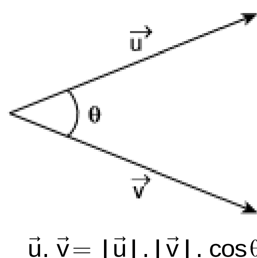
NORMA OU MÓDULO:

Se $\vec{u} = (x, y) \rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Vetor unitário:

É um vetor com módulo igual a 1.

Ângulo entre vetores:



$\vec{u}.\,\vec{v} = |\vec{u}|\,.\,|\vec{v}|\,.\,\cos\theta$

VETORES ORTOGONAIS: $\vec{u}.\,\vec{v} = 0$

Produto vetorial:

Se os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ estão no $\mathbb{R}^3$ e os vetores $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ e $\vec{k} = (0, 0, 1)$,

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}$$

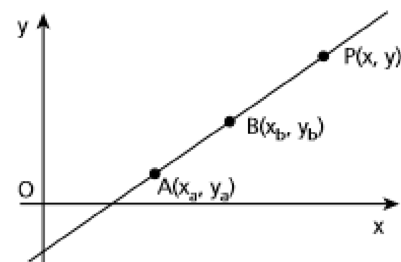
Produto misto:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u}.(\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_w & y_w & z_w \end{vmatrix}$$

14. EQUAÇÃO DA RETA

Equação geral: $ax + by + c = 0$

Podemos obter a equação através de dois pontos A e B com o seguinte procedimento:



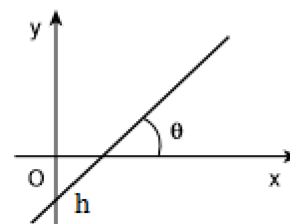
$$\Delta = \begin{vmatrix} x & y \\ x_a & y_a \\ x_b & y_b \\ x & y \end{vmatrix} = 0$$

Equação reduzida:

$y = mx + h$

m = coeficiente angular

h = coeficiente linear



$m = tg\theta$

pH

Equação segmentária:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

p = valor onde a reta intercepta o eixo x

q = valor onde a reta intercepta o eixo y

Condição de paralelismo:

$r // s \Leftrightarrow m_r = m_s$

Condição de perpendicularidade:

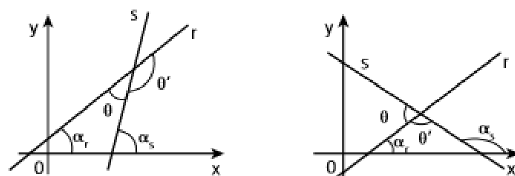
$r \perp s \;\; m_r \cdot m_s = -1$

Distância de ponto a reta:

Ponto $P(x_0, y_0)$ e reta r

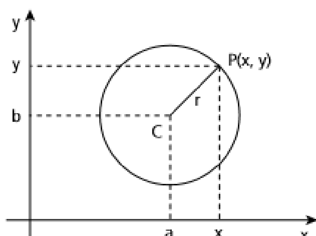
$$d(P,r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Ângulo entre duas retas:



$$tg\theta = \left|\frac{m_s - m_r}{1 + m_s . m_r}\right|$$

15. Equação da Circunferência



Equação reduzida:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

Equação geral:

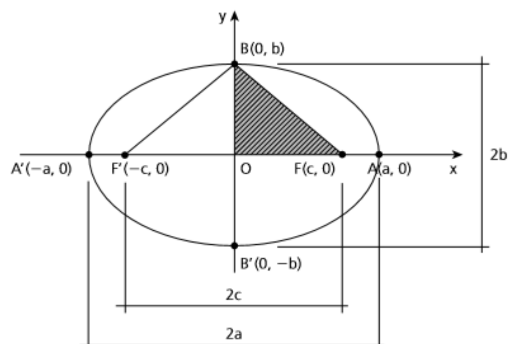
$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$

Interseção e tangência de reta e circunferência:

$$S\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{S tem duas soluções} \rightarrow \text{reta é secante} \\ \text{S tem uma solução} \rightarrow \text{reta é tangente S tem duas} \\ \text{S não tem solução} \rightarrow \text{reta é exterior} \end{cases}$$

16. Equação da Elipse



AA' = 2a : eixo maior
BB' = 2b : eixo menor
FF' = 2c : distância focal

Relação fundamental: $a^2 = b^2 + c^2$

Equação:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (se o eixo maior estiver sobre Ox)}$$

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \text{ (se o eixo maior estiver sobre Ou)}$$

17. Estatística

Média aritmética:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} x_i$$

MODA:

É o valor de maior frequência dentre os dados fornecidos.

Mediana:

Após ordenar os dados em ordem crescente, a mediana é o dado que se encontra na posição central. Se o número de dados for par, a mediana é dada pela média aritmética dos dois valores centrais.

Variância: $V = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}(x_i - \overline{x})^2$

Desvio padrão: $DP = \sqrt{V}$

Média geométrica: $MG = \sqrt[n]{x_1 . x_2 . x_3 ..... x_n}$

Média harmônica: $MH = \dfrac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + ... + \frac{1}{x_n}}$